Ex 30 (a) $\sum_{n\geq 0}(2^n+1)x^n$

- $\lim_{\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{\infty}\left|\frac{2^{n+1}+1}{2^n+1}\cdot\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = \lim_{\infty}\frac{2^n(2+1/2^n)}{2^n(1+1/2^n)}\cdot|x| = 2|x|$

donc, par critère du quotient, on a:

si $|x|<1/2$: la série converge

si $|x|>1/2$: la série diverge

- en $x=\frac{1}{2}$: $a_n=(2^n+1)\frac{1}{2^n}=1+\frac{1}{2^n} \Rightarrow \lim_{\infty} a_n = 1 \neq 0$: la série diverge
- en $x=-\frac{1}{2}$: $a_n=(2^n+1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n=(-1)^n\left(1+\frac{1}{2^n}\right) \Rightarrow \lim_{\infty} a_n = \lim_{\infty}(-1)^n\cdot 1 \neq 0$: idem

b) $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^n}x^n$

- $\lim_{\infty}\left|\sqrt[n]{\frac{x^n}{n^n}}\right| = \lim_{\infty}\left|\frac{x}{n}\right| = 0$, donc la série diverge toujours (sauf $x=0$!) par critère de la racine

c) $\sum_{n\geq 0}\frac{3}{(n+1)^n}x^n$

- $\lim_{\infty}\left|\sqrt[n]{\frac{3x^n}{(n+1)^n}}\right| = \lim_{\infty} 3^{\frac{1}{n}}\left|\frac{x}{n+1}\right| = 1\cdot\frac{|x|}{\infty}$, donc la série converge toujours par crit. rac.

d) $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$

- $\lim_{\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{x^n}\right| = \lim_{\infty}|x|\frac{n}{n+1} = |x|$

donc, par critère du quotient, on a:

si $|x|<1$: la série converge

si $|x|>1$: la série diverge

- en $x=1$: $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ converge (déjà vu)
- en $x=-1$: $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{n} = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1+n}\cdot\frac{1}{n} = \sum_{n\geq 1}(-1)^{2n+1}\frac{1}{n} = -\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$

qui diverge (série harmonique)

ex 31

a) $\sum_{n\geq 1} n x^n$

• $\lim_{\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{\infty} \left|\frac{(n+1)x^{n+1}}{n\,x^n}\right| = \lim_{\infty} \frac{n+1}{n}|x| = |x|$

donc : si $|x|<1$: conv. par crit. quotient
si $|x|>1$: div.

• en $x=1$: $\sum_{n\geq 1} n$ diverge ($\lim_{\infty} a_n = \lim_{\infty} n = +\infty \neq 0$ [crit div])

• en $x=-1$: $\sum_{n\geq 1} n(-1)^n$ diverge ($\lim_{\infty} a_n$ oscille entre $\pm\infty$ [crit div])

donc $r=1$ et l'intervalle de convergence est $]-1;1[$

b) $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n(n+1)}$

• $\lim_{\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{\cancel{(n+1)}(n+2)} \frac{n\cancel{(n+1)}}{x^n}\right| = \lim_{\infty} \frac{n}{n+2}|x| = |x|$

donc si $|x|<1$: conv. par crit. quotient
si $|x|>1$: div

• en $x=1$: $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge [déjà vu]

• en $x=-1$: $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ converge absolument (cas $x=1$), donc converge.

donc $r=1$ et $I=[-1;1]$

c) $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

• $\lim_{\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{\infty} \left|\frac{x^{2n+2}}{\cancel{(n+2)(n+3)}(n+4)} \frac{(n+1)\cancel{(n+2)(n+3)}}{x^{2n}}\right| = |x^2|\cdot 1 = |x^2| = x^2$

donc si $x^2<1 \Leftrightarrow -1<x<1$: la série converge par crit. quotient
si $x^2>1 \Leftrightarrow |x|>1$: " " diverge

• en $x=1$: $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \leq \frac{1}{n^3}$

avec $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ converge [Σ de Riemann]

donc la série converge pour $n\geq 1$, donc pour $n\geq 0$

• en $x=-1$: $\sum \frac{(-1)^{2n}}{(n+1)(\ )(\ )} = \sum \frac{1}{(n+1)(\ )(\ )}$ idem

donc $r=1$ et $I=[-1;1]$